© 2005 г. С. А. КАБАНОВ, д-р техн. наук
(Балтийский государственный технический университет "ВОЕНМЕХ"
им. Д.Ф. Устинова, Санкт-Петербург)

ОПТИМИЗАЦИЯ ПО ФУНКЦИОНАЛУ КРАСОВСКОГО МЕТОДОМ КВАЗИЛИНЕАРИЗАЦИИ БЕЛЛМАНА

Показано, что оптимизация по функционалу обобщенной работы методом квазилинеаризации Беллмана приводит к известному результату А.А. Красовского.

Для нелинейной динамической системы, описываемой векторным уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t)\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1, \ \mathbf{x} \in R^n, \ \mathbf{u} \in R^m, \tag{1}$$

оптимальным по функционалу обобщенной работы (ФОР) А.А. Красовского

$$I = I_1 + \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{u}_o^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}, t)K(t)\mathbf{u}_o(\mathbf{x}, t)dt, \tag{2}$$

$$I_1 = V_3[\mathbf{x}(t_2), t_2] + \int_{t_1}^{t_2} \left[Q(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}K(t)\mathbf{u}\right] dt, \tag{3}$$

является управление [1]

$$\mathbf{u}_o(\mathbf{x}, t) = -K^{-1}(t)\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}, t)\left(\frac{\partial V(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}}\right)^{\mathrm{T}}, \tag{4}$$

функция $V(\mathbf{x}, t)$ является решением линейного дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = -Q(\mathbf{x}, t), \quad V(\mathbf{x}, t_2) = V_3[\mathbf{x}(t_2), t_2]. \tag{5}$$

В [2] на частном примере решения задач синтеза управлений, оптимальных по ФОР (2) и по функционалу Больца (3), производится их сравнение с выводом о том, что первое решение является приближенным для второго.

Авторы [3] на основании того, что первая итерация метода квазилинеаризации Беллмана для критерия Больца (3) совпадает с решением задачи оптимизации ФОР (2), делают вывод о прямой связи этих методов.

В [4] отмечается, что оба решения задач минимизации критериев (2) и (3) являются точными. Как известно [1], минимизация ФОР (2) эквивалентна минимизации функционала Больца (3) при дополнительном изопериметрическом условии

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{u}_o^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}, t)K(t)\mathbf{u}_o(\mathbf{x}, t)dt = C.$$

Решение отражает те требования к исследуемым системам, которые отражены в принятых критериях качества. Поэтому сравнение решений, приведенных в [2, 3], и поиск связи между методами [3] некорректны. Другое дело, "что все выводы о свойствах приближенных решений задачи оптимального управления по критерию качества (здесь (3)) и свойствах полученных замкнутых систем управления ... могут быть автоматически перенесены на решение задачи оптимизации по критерию обобщенной работы" [3] и могут быть полезны. Причем польза обратного переноса этих выводов о решениях по ФОР на первое приближение решения по критерию Больца будет больше, так как соответствующих публикаций существенно больше.

Покажем, что оптимизация по ФОР методом квазилинеаризации Беллмана приводит к известному результату А.А. Красовского [1], что и следовало бы ожидать, так как оптимизация по ФОР и другими методами (принципом максимума, динамическим программированием и др.) приводит к этому [5].

Решение по методу квазилинеаризации сводится к итерационной процедуре вычисления управления

$$\mathbf{u}_k(\mathbf{x},t) = -K^{-1}(t)\varphi^{\mathrm{T}}(\mathbf{x},t)\frac{\partial V_{k-1}(\mathbf{x},t)}{\partial \mathbf{x}},$$

где функция $V_{k-1}(\mathbf{x},t)$ в случае ФОР определяется линейным дифференциальным уравнением в частных производных

$$-\frac{\partial V_{k-1}}{\partial t} = \frac{\partial V_{k-1}}{\partial \mathbf{x}}[\mathbf{f}(\mathbf{x},t) + \varphi(\mathbf{x},t)\mathbf{u}_{k-1}(\mathbf{x},t)] + Q(\mathbf{x},t) + \frac{1}{2}\mathbf{u}_o^{\mathrm{T}}(\mathbf{x},t)K(t)\mathbf{u}_o(\mathbf{x},t) +$$
$$+ \frac{1}{2}\mathbf{u}_{k-1}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x},t)K(t)\mathbf{u}_{k-1}(\mathbf{x},t), \qquad V_{k-1}(\mathbf{x},t_2) = V_3(\mathbf{x},t_2).$$

По завершении итерационного процесса, когда $\mathbf{u}_k(\mathbf{x},t) \approx \mathbf{u}_{k-1}(\mathbf{x},t) \approx \mathbf{u}_o(\mathbf{x},t)$, $\partial V_{k-1}/\partial \mathbf{x} \approx \partial V_{k-2}/\partial \mathbf{x} \approx \partial V/\partial \mathbf{x}$, это уравнение приобретет вид уравнения Ляпунова

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x},t) + Q(\mathbf{x},t), \quad V(\mathbf{x},t_2) = V_3(\mathbf{x},t_2).$$

Таким образом, известное решение А.А. Красовского совпадает с результатом применения для ФОР метода квазилинеаризации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Справочник по теории автоматического регулирования / Под ред. А.А. Красовского. М.: Наука, 1987.
2. *Колосов Г.Е., Ливанов К.К.* Анализ качества одного квазиоптимального алгоритма управления // АиТ. 1990. № 9. С. 179–181.
3. *Гулько Ф.Б., Новосельцева Ж.А.* Связь оптимизации по критерию обобщенной работы и метода квазилинеаризации Беллмана // АиТ. 1990. № 10. С. 186–187.
4. *Красовский А.А.* О статье Колосова Г.Е., Ливанова К.К. Анализ качества одного квазиоптимального алгоритма управления // АиТ. 1990. № 9. С. 182–183.
5. *Кабанов С.А.* Управление системами на прогнозирующих моделях. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1997.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Буковым.

Поступила в редакцию 22.05.2003